三角格子スピン系(有限系)の量子カオスと古典カオス

福岡工大・教養　中村勝弘

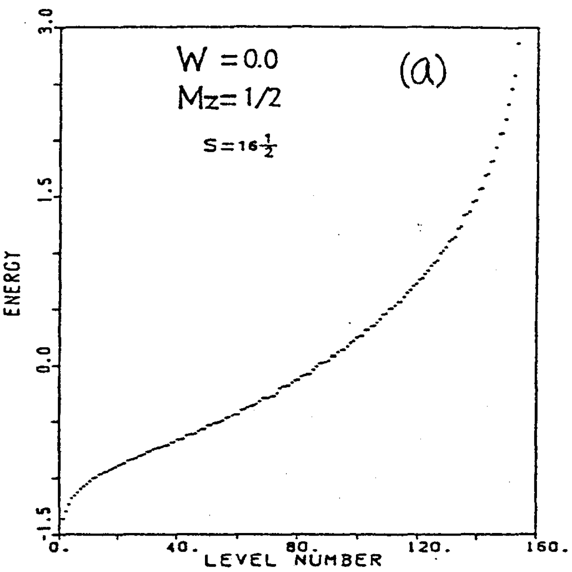
完全可積分系の研究が終局(完成)に近づくにつれ、非可積分Hamilton力学系の研究が本格化している。Fermi-Pasta-Ulamの非線型格子系(非線型相互作用で結合した振動子系)の研究も、long-time tailの問題とも関連させて、再び活発になりつつある。

既に報告したように[1),2)] lattice spin系とでも言うべき、反強磁性相互作用(XXZ型)で結合したregular triangle上の3個の古典Heisenberg spin系は、高エネルギー領域でKAM、低エネルギー領域でirregular orbitを産み出す。これは、Henon-Heiles系やSinaiのBilliardと対照的な事実である。

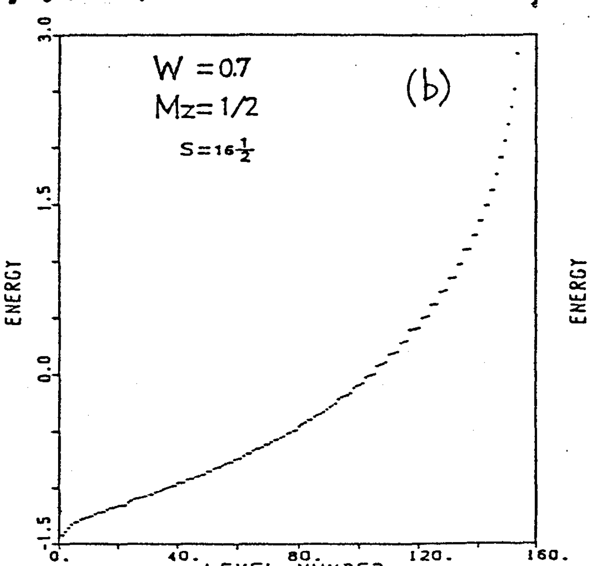
ここでは、上の非可積分古典spin系の量子論的counterpartについて考察する。興味の中心は、spinの値が大きい半古典的な領域のlevel distributionにある。XXZ型の量子spin Hamiltonianは、

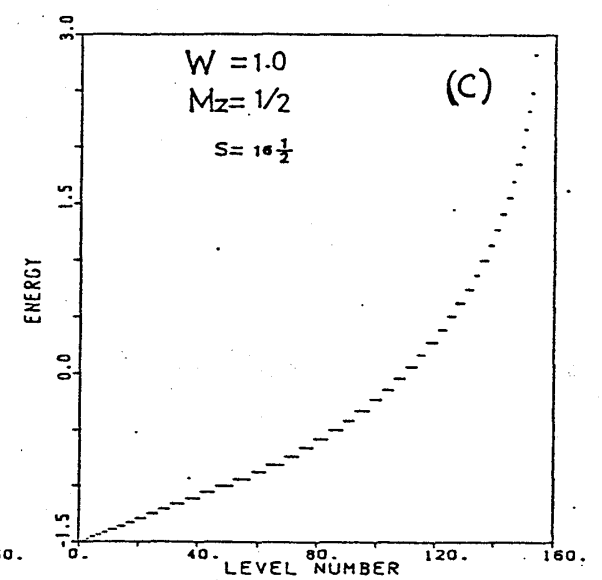
$$H = J\sum_{\langle ij\rangle}\left\{(S_i^+S_j^- + c.c.)/2 + W S_i^z S_j^z\right\} \cdots ①$$

で与えられる。3個のspinは正三角形状に配置しているので、周期境界条件のある1次元系と同じである。①のeigenstatesは、3つの量子数のセット(i) 格子の並進不変性からくる全波数K, ii) spin空間のplanarな回転不変性からくる全磁化M_z, iii) 正三角形のmirror symmetryからくるparityで特徴づけられる。例えば、K, M_z, even parityで指定される基底の一例は、$M+M'+M''=M_z$として、次の式で与えられる。



第1図
K=0, $M_z=\frac{1}{2}$
even parity
に属する
levelの分布
(a) W=0.0
(b) W=0.7
(c) W=1.0





$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|S,M\rangle_1\otimes|S,M'\rangle_2\otimes|S,M''\rangle_3+e^{ik}|S,M''\rangle_1\otimes|S,M\rangle_2\otimes|S,M'\rangle_3 + e^{2ik}|S,M'\rangle_1\otimes|S,M''\rangle_2\otimes|S,M\rangle_3\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(M\leftrightarrow M'\right)\Big] \cdots ②$$

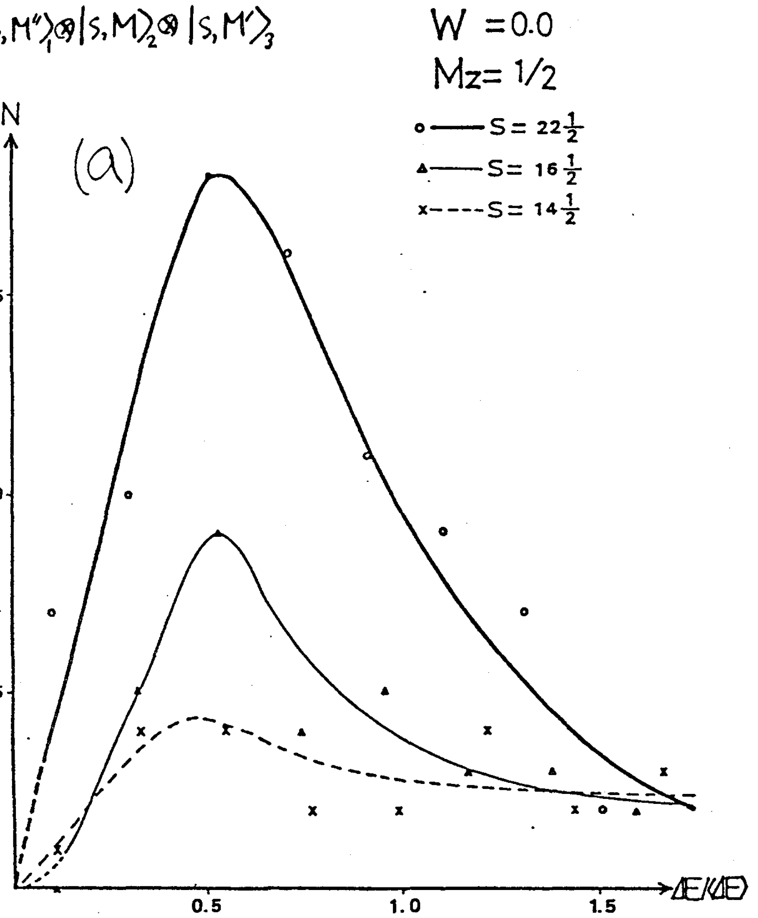
以下の計算では、$K=0$、$M_z=\left\{\begin{matrix}0\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$、even parityで指定されるmanifoldの中で①の対角化を行なった。得られたenergy levelを$S(S+1)$でscaleしておくと、Sの値によらない定まったenergy領域にlevelが分布する。Sの値を大きくすると、levelはち密に分布することになる。

$S=16\frac{1}{2}$で$W=0.0, 0.7, 1.0$の場合のlevel分布が第1図(a),(b),(c)に各々示してある。$W=0.0, 0.7$の時は、高エネルギー領域でlevelがclusterをつくり、各clusterが階段(stair)で隔っているが、低エネルギー領域では、level間の強い斥力型相関のため、levelは一様に分布している。$W=1.0$の時は、全エネルギー領域でdegenerate clusterをつくり、regularな階段構造がつくられている。これは、$W=1.0$の時、①は完全可積分となることの反映である。

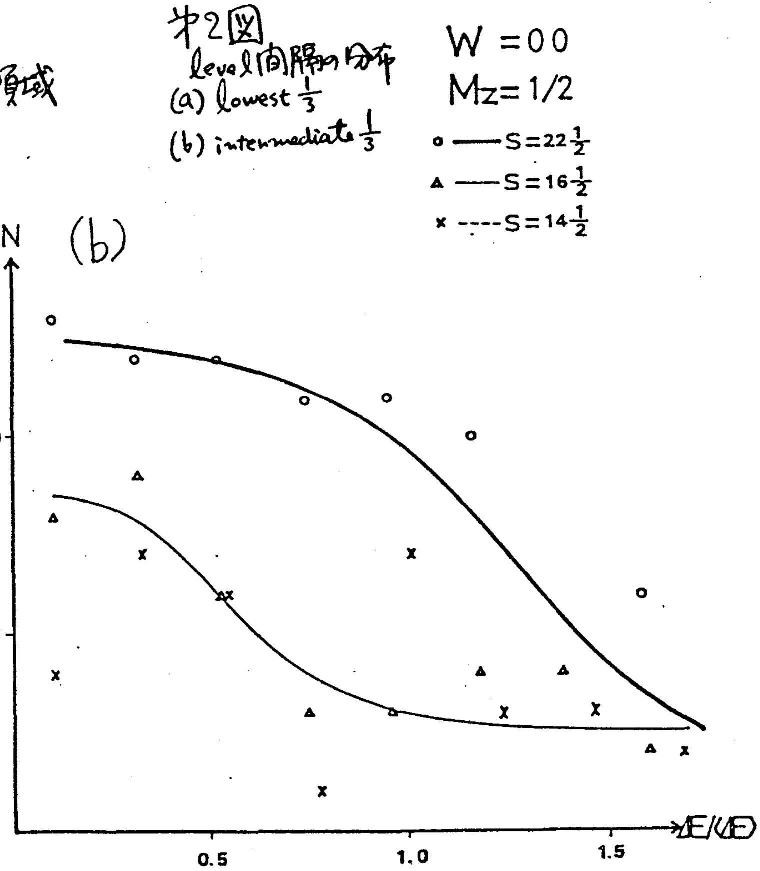
$W\neq1.0$の時のlevelの分布が従う統計を調べるために、隣接するlevel間のlevel間隔の分布を調べ、第2図(a),(b)に示した。第2図(a)は、全エネルギーlevelのうち、lowest $\frac{1}{3}$のlevelを採用し、level間隔$\Delta E_i=E_{i+1}-E_i$の分布を調べたもので、spinの値を大きくすると、次第に、Wigner-Dyson分布：

$$P(t)=\frac{\pi}{2}t\exp\left(-\frac{\pi}{4}t^2\right)\cdots ③$$

$$t=\Delta E/\langle\Delta E\rangle$$



第2図
level間隔の分布
(a) lowest $\frac{1}{3}$
(b) intermediate $\frac{1}{3}$



に近ずいていくことがわかる。第2図(b)は、intermediate $\frac{1}{3}$ level を採用し、level間隔の分布を調べたもので、$\lim_{t\to 0} P(t) \neq 0$ を充たす分布に近づいていく。これは、必ずしもPoisson分布：

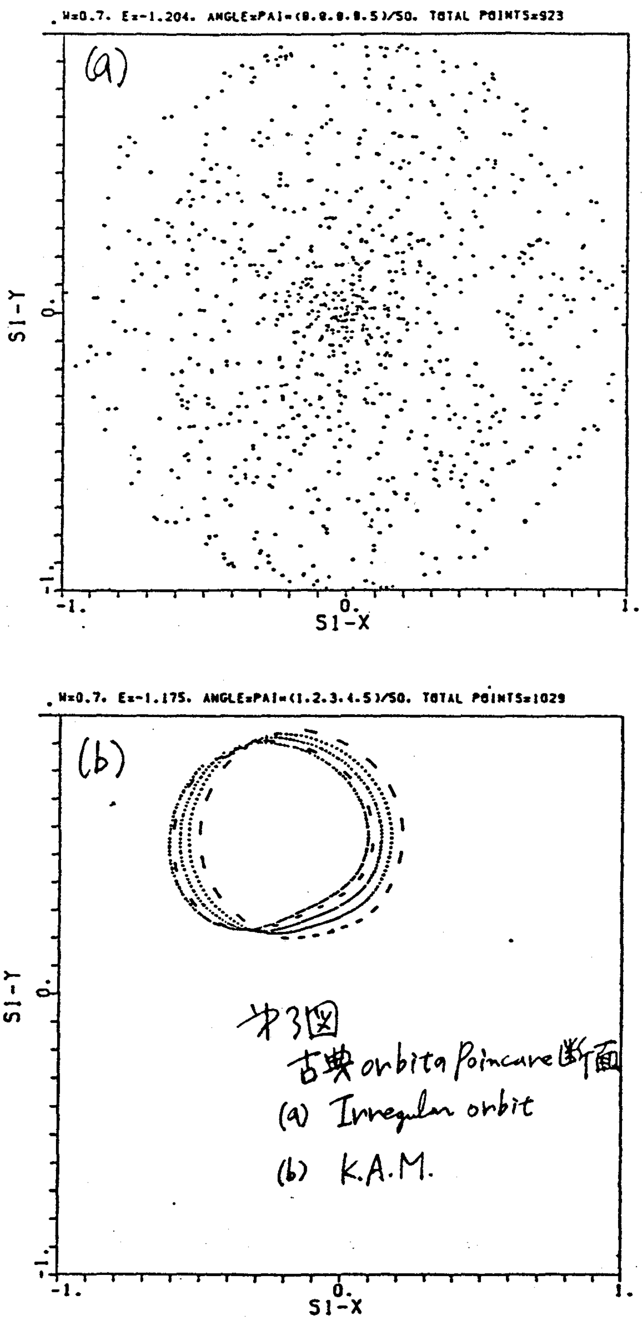
$$P(t) = \exp(-t) \quad \cdots\cdots ⑦$$

に収レンしないようである。W=0.7の場合も同様の結果を得ている。W=1.0の場合は、どのエネルギー領域に着目しても、$P(t) = \delta(t)$ の形になる。これは可積分系の特徴であろう。

Wigner分布は、level間に斥力型の相互作用があると仮定して、又、Poisson分布は、level間に相関がないと仮定して導びくことが出来るが、より基本的には、Random matrixのeigenvalueの分布(Dyson)から系統的に得られる。

全く、不思議なことは、Hamiltonian①にrandomな枠構が存在しないにもかかわらず、levelの分布がrandomになることである。古典極限の場合と同様な事態が、ここでも出現したのである。ちなみに、Wigner-Dyson分布が成立する低エネルギー領域では、古典極限で、第3図(a)のようなspinのIrregular orbitが期待でき、$\lim P(t) \neq 0$ を充たす分布 $P(t)$ が成立するintermediate領域では、古典極限でK.A.M.が期待できる(第3図(b))[1),2)]。

さて、量子極限から古典極限へ移行する時、つまり $S \to \infty$ とする時、量子力学固有の概念であるlevel間隔が、Sについていかなるscaling則に従うのかは最大の問題であるが、これについての詳細は別の機会に述べたい。



第3図
古典orbitのPoincare断面
(a) Irregular orbit
(b) K.A.M.

文献

(1) K.Nakamura：有限古典spin鎖のspin waveとirregular motion
(「ソリトンのダイナミックスとそれに関するカオスの研究会」基研1983年12月，物性研究掲載予定)
(2) K. Nakamura：三角格子古典Heisenberg spin系のChaos
(「ランダム系の秩序化」科研費研究会(箱根)1983年12月，物性研究掲載予定)